Introducció a la deducció natural

Daniel Clemente Laboreo

Agost 2004 (revisat en Maig 2005)

Índex

1 Abans de res...

Aquest tutorial està disponible en molts idiomes: espanyol[1] (i PDF), esperanto[2] (i PDF), català[3] (i PDF), i anglès[4] (i PDF).

Les fórmules queden molt més maques al PDF, però si no t'és possible usar-ho, mira les pàgines en HTML.

1.1 Qui soc

Em dic Daniel Clemente Laboreo, tinc 19 anys (al 2004), visc a Gavà (Barcelona), i estudio informàtica a la *FIB* (*UPC*). Va ser allà, a l'assignatura *ILO* (*Introducció a la lògica*), on em van ensenyar tot aquest tema.

[1] http://www.danielclemente.com/logica/dn.html
[2] http://www.danielclemente.com/logica/dn.eo.html
[3] http://www.danielclemente.com/logica/dn.ca.html
[4] http://www.danielclemente.com/logica/dn.en.html

1.2 Per què escric això

Per diversos motius:

- Hi ha un buit important en buscar "*deducció natural*" al Google. Jo mateix vaig necessitar estudiar-ho abans de l'examen i no vaig trobar res útil que em pogués ajudar. El mateix amb *natural deduction* o *nd*: hi havia alguns tutorials, però cap ben fet: o no s'entenia, o tenia alguns caràcters especials que no es veien bé, o donaven tot per entès. Així que vaig proposar-me aportar aquest tutorial que segur que ajudarà a algú.

- És un tema que m'agrada i que se'm dóna bé.

- Fa pensar. Potser no té una gran utilitat pràctica, però realment fa falta esforçar-se i passar-hi molta estona per resoldre alguns problemes molt simples.

- Bé, confesso que ho vaig escriure per aprendre a processar textos amb LaTeX. Costa bastant d'aprendre, però els resultats fan que valgui la pena.

1.3 A qui va dirigit

En principi, a qualsevol a qui l'agradi la lògica, la informàtica, o les matemàtiques. Qui vulgui preparar-se per les assignatures de lògica de la universitat també guanyarà alguns conceptes útils.

Aquest no pretén ser un curs complet de deducció natural, sinó que continuarà sent només una introducció. Quan aprengui més, el corregiré si cal, però no hi afegiré més seccions (les faria en documents apart).

1.4 Llicència

Tot el document és FDL[5] (com la GPL del software lliure, però per documents). El codi font està fet amb LyX (dn.ca.lyx[6]), i utilitza les macros fitch.sty de Johan W. Klüwer. He usat el programa latex2html (lleugerament partxejat) per fer la web.

El pots modificar o traduir a altres idiomes que coneguis bé, a més de poder redistribuir-lo, vendre'l, i moltes més coses.

2 Conceptes bàsics

A això de la lògica s'ha de tenir perfectament clar el significat de cada paraula. Em limitaré a recordar què són i com es llegeixen els símbols estranys que s'usen en aquest document.

[5] http://www.gnu.org/licenses/fdl.html

[6] http://www.danielclemente.com/logica/dn.ca.lyx

2.1 Formalització

Formalitzar vol dir escriure una expressió d'una manera estàndard que tothom pugui entendre.

Quan treballem amb algorismes lògics, podem estar pensant tota l'estona en frases com "*Si plou i no tinc paraigua, llavors em mullo*". Es pot, però és massa llarg. És millor representar cada acció amb una lletra, i escriure la frase usant aquestes lletres junt amb paraules senzilles com *i*, *o*, *no*, o *llavors*.

Exemple. Tenim aquest vocabulari:

L: *ploure*

P: *tenir paraigua*

M: *mullar-se*

La frase "*Si plou i no tinc paraigua, llavors em mullo*" queda millor com a "*si* L *i no* P*, llavors* M".

En deducció natural s'usarà només la versió de les lletres, amb aquestes condicions:

- Les lletres (que s'anomenen *lletres proposicionals*) van en majúscules.
- S'acostumen a usar P, Q, R, S, ... però qualsevol altra és correcta.
- Es posen uns símbols especials per als operadors *i*, *o*, *no* i *implicació*.

2.2 Símbols usats

Per expressar les relacions entre una acció i una altra, hi ha uns quants dibuixets internacionals. Els operadors bàsics que has de conèixer són $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$. Els altres són més complicats, però els he posat tots per quan hagis de consultar-los.

Símbol	**Llegit...**	**Descripció**
$\vee$	*o*	$A \vee B$ es compleix quan un dels dos, o tots dos, és cert.
$\wedge$	*i*	Per a què $A \wedge B$ es compleixi, tant A com B han de ser certs.
$\neg$	*no*	$\neg A$ només es compleix quan A és fals.
$\Rightarrow$	*implica*	Indica una conseqüència. La expressió $A \Rightarrow B$ diu que quan A es compleix, llavors B també. A més, $A \Rightarrow B$ és cert excepte pel cas A cert i B fals. Per entendre-ho, pensa en un A que impliqui B i pregunta't: *és possible que A sigui cert i B no?* Tampoc et preocupis molt per això, no és important ara.
$\iff$	*si i només si*	$A \iff B$ equival a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Vol dir que de A podem deduir B i viceversa, o sigui, que són equivalents.
$\square$	*fals*	El quadradet buit representa a *fals* (el *0* binari). Més tècnicament, representa a $\{\}$.
$\blacksquare$	*cert*	El quadradet ple representa a *cert* (l'*1* binari). Més tècnicament, representa a $\{<>\}$.
$\exists$	*existeix...*	$\exists xPx$ es llegeix *existeix un x tal que P de x.* Si al nostre domini podem trobar un element (o més) tal que es compleixi la propietat P aplicada a aquest element, llavors la fórmula és certa.
$\forall$	*per tot...*	$\forall xPx$ es llegeix *per tot x, P de x.* Si tots els elements amb què treballem compleixen la propietat P, llavors la fórmula és certa.
$\vdash$	*llavors*	$\vdash$ és el símbol del *seqüent*, que és la manera de dir "*quan es compleix tot això de l'esquerra passa també tot allò de la dreta*". Hi ha seqüents vàlids, com $P \wedge Q \vdash P$ o com $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R,\ P \vdash P \wedge R$. També n'hi ha d'invàlids, com $P \Rightarrow Q, \neg P \vdash \neg Q$. L'objectiu de la deducció natural és demostrar que un seqüent és vàlid.
$\vDash$	*vàlid*	$\phi \vDash \varphi$ serveix per dir que φ és conseqüència lògica de ϕ, però quan s'escriu $A \vDash B$, es vol dir que el seqüent $A \vdash B$ és vàlid; o sigui, que hem pogut demostrar-ho d'alguna manera, i ara es considera cert sota qualsevol interpretació dels símbols de predicat.
$\nvDash$	*invàlid*	$\phi \nvDash \varphi$ vol dir que φ no és conseqüència lògica de ϕ. Si trobes una sèrie de valors (*model*) que faci cert a ϕ però fals a φ, es demostra la invalidesa.
$\Vdash$	*satisfactible*	Un conjunt de fórmules és satisfactible si existeix una sèrie de valors (*model*) que les faci certes a totes al mateix temps.
$\nVdash$	*insatisfactible*	Un conjunt de fórmules és insatisfactible si no hi ha cap combinació de variables (*model*) que les faci totes certes al mateix temps.

2.3 Precedència dels operadors

En veure una expressió, has de saber dir què és. Per exemple: $A \vee B \Rightarrow C$ és una implicació (no una disjunció!), perquè el $\Rightarrow$ és l'últim en evaluar-se (té menor prioritat que el $\vee$).

Aquí poso els operadors, ordenats inversament per prioritat.

- $\iff$
- $\Rightarrow$
- $\vee$ i $\wedge$ (tenen la mateixa prioritat)
- $\neg$

Això vol dir que $\neg$ és qui més "*s'agarra*" al símbol que acompanya. Un exemple de quan i on fan falta els parèntesis:

$P \vee \neg Q \Rightarrow R \wedge P \iff \neg(R \vee S) \wedge A \Rightarrow B$ és el mateix que $(\ (P \vee (\neg Q))\ \Rightarrow (R \wedge P)\ ) \iff (\ ((\neg(R \vee S)) \wedge A) \Rightarrow B\ )$

Tranquil, no tornaré a utilitzar expressions tan llargues.

3 Deducció natural

Ara toca explicar què és, com es fa, i si té cap utilitat.

3.1 Per a què serveix

La deducció natural serveix per intentar demostrar que un raonament és correcte ("*per comprovar la validesa d'un seqüent*", diu la teoria). Exemple:

Jo et dic: "*A l'estiu fa calor, i ara estem a l'estiu, per tant fa calor*". Et poses a fer càlculs, i finalment dius: "*Ja està, puc demostrar que el raonament que has fet és correcte*". Per a això serveix la deducció natural.

No sempre és tan fàcil: "*si suspens una assignatura, l'has de repetir. Si no l'estudies, la suspens. Suposem que no la repeteixes. Llavors, o l'estudies, o la suspens, o totes dues coses alhora*". Aquest raonament és vàlid i es pot demostrar amb la deducció natural.

Fixa't que no cal que et creguis o entenguis tot allò que jo et digui. Per exemple, jo dic: "*Els tiristors són petits i divertits; un cigró no és petit, així que no és un tiristor*". Encara que no sàpigues de què estic parlant, o et sembli una idiotesa (que ho és), has d'estar completament segur/a que el raonament és correcte.

O sigui, que donada una suposició "*si passa això llavors passa això altre*", la deducció natural permet dir "*sí, així és*". En llenguatge lògic: si et donen un seqüent $A \vdash B$, pots acabar concloent que és $\vDash$ (*vàlid*). Llavors s'escriu $A \vDash B$ (A té com a conseqüència B).

3.2 Per a què no serveix

No serveix per demostrar la *invalidesa* d'una suposició. Si jo dic "*si és de dia, no és de nit; i ara és de dia, per tant també és de nit*" podràs passar-te una estona intentant provar les regles de la deducció natural, però sense aconseguir res útil. Al cap d'un temps aniràs intuint que probablement el raonament no sigui vàlid, i és llavors quan s'haurien de provar altres mètodes -que no són el de deducció natural- amb la fi de demostrar la invalidesa. Estan explicats més endavant.

O sigui, que la deducció natural només serveix per demostrar la validesa, però no la invalidesa. Quina pena, no?

Tampoc serveix per donar una bona resposta a la pregunta "*Què passaria si...?*". Quan demanen demostrar la validesa de $A \vdash B$, hem de pensar en què coses passarien si es complís A, i si descobrim que una d'elles és B, ja hem acabat. Però mai podrem donar una llista finita de totes aquestes coses.

3.3 Funcionament

Es demana demostrar la validesa de $\Gamma \vdash S$, on Γ (es llegeix *gamma*) és un grup de fórmules separades per comes, i S és una sola fórmula.

Partim de que totes les fórmules de Γ són certes, i, mitjançant 9 regles concretes, podem anar descobrint què més coses són certes. La nostra intenció és veure que S és certa; un cop aconseguit ja podrem acabar.

Alguns cops no podrem treure veritats de cap lloc, i haurem de fer suposicions: "*bé, no estic segur que $A \wedge B$ sigui sempre cert, però si es compleix C, llavors sí que ho és*". Doncs ja hem descobert una altra cosa certa: que $C \Rightarrow A \wedge B$.

Com veus, sempre s'ha de pensar en cap a on volem dirigir-nos, perquè d'altra forma podríem endevinar un munt de coses que són certes però que no ens estan demanant. Per exemple, amb $A \vee B,\ \neg A \vdash B$ hem d'arribar a que B és cert. Podem descobrir que $\neg(A \wedge B)$, $A \vee B \vee C$, $(A \vee B) \Rightarrow \neg A$, i moltes més coses, però el que ens interessa és B i res més. O sigui, que si no vas pel camí correcte, pots fer-te un embolic.

3.4 Notació

Hi ha moltes maneres d'escriure els esquemes de deducció natural. Jo usaré l'estil Fitch, perquè és el que em van ensenyar, és fàcil d'entendre, i ocupa poc espai. És semblant a:

$$
\begin{array}{lll}
1 & P \Rightarrow Q & \\
2 & Q \Rightarrow R & \\
3 & \quad \vert\ \underline{P} & \text{H} \\
4 & \quad \vert\ Q & \text{E}\Rightarrow 1,3 \\
5 & \quad \vert\ R & \text{E}\Rightarrow 2,4 \\
6 & \quad \vert\ Q \wedge R & \text{I}\wedge\ 4,5 \\
7 & P \Rightarrow Q \wedge R & \text{I}\Rightarrow 3,6
\end{array}
$$

Amb això s'ha demostrat la validesa de $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$.

L'esquema es va fent línia per línia, de dalt a baix. Els números de l'esquerra indiquen el número de línia, i sempre van en ordre.

Les primeres línies contenen cadascuna de les fórmules que hi ha a la part esquerra del seqüent. En aquest cas són dues: $P \Rightarrow Q$ i $Q \Rightarrow R$. A partir d'aquestes hem d'arribar a $P \Rightarrow Q \wedge R$.

A cada línia apuntem què cosa hem descobert certa, i a la dreta expliquem com l'hem trobada. Aquests símbols de la dreta (les E i I) són les sigles que identifiquen a cadascuna de les 9 regles. Per exemple, aquí surten l'*eliminació de la implicació* ($E \Rightarrow$), la *introducció de la conjunció* ($I\wedge$), i la *introducció de la implicació* ($I \Rightarrow$). Els numerets que les acompanyen donen informació sobre d'on s'han tret les fórmules necessàries per aplicar la regla. Són números de línia, o sigui, que per aplicar una regla hem de basar-nos en allò que ja hem escrit abans.

Per últim, aquella ratlla vertical que va la línia 3 a la 6 és una hipòtesi (per això s'ha posat una H a la dreta). Tot el que hi ha dins no és cert sempre, sinó només quan es compleix P (l'encapçalament de la hipòtesi, a la línia 3). Per això, tot allò que fem dins de la hipòtesi no ho podem usar fora, perquè no sempre es compleix.

El procediment acaba quan descobrim que és cert allò de la dreta del seqüent, en aquest cas $P \Rightarrow Q \wedge R$ (surt a l'última línia).

4 Les regles

Aquí hi són enunciades i explicades les nou regles bàsiques que s'usen a la deducció natural. Indiquen quan i com podem afegir noves fórmules que segueixin sent certes.

Els exemples (explicats) són a la següent secció.

4.1 Iteració

Aquesta és una regla molt senzilla:

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A & \\ \hline & A & \text{IT n} \end{array}$$

Sí, ho sé, escrit així queda bastant estrany, però és per a què serveixi com a definició. Això de dalt vol dir que si en la línia número n tenim escrit A (sigui l'expressió que sigui) llavors podem tornar a escriure A a la línia actual, i per justificar-ho hem d'escriure a la dreta $IT\ n$.

Que per a què serveix això? Doncs de moment, per res, però tindrà la seva utilitat quan comencem a fer allò de les hipòtesis. Com que una hipòtesi és *tancada*, totes les regles hauran de treballar amb fórmules que es trobin dins de la hipòtesi. Si una fórmula està just a fora, la podem ficar dins amb això de la *iteració*.

Alguns creuen que no és necessari gastar una línia així, però queda molt més clar quan s'usa. El que no s'accepta és usar-la només per "*apropar*" una fórmula que queda vàries línies per damunt: no fa falta tornar a escriure una línia si ja la tenim a dalt en la derivació actual.

4.2 Introducció de la conjunció

La conjunció (que és la i) la podem crear fàcilment:

m	A	
n	B	
	$A \wedge B$	I$\wedge$ m,n

Entén bé el funcionament de les figures com aquesta. Quan es posa una ratlla horitzontal llarga, normalment és per separar les *premisses* (a sobre) de la *conclusió* (a sota). Les premisses són les condicions que s'han de complir per aplicar la regla, i la conclusió (o *resolvent*) el resultat de l'aplicació de la regla.

Aquesta regla diu que si a una línia tenim escrita una cosa certa, i a una altra en tenim altra, també certa, llavors podem deixar escrit en una sola línia que ambdues coses són certes. Haurem d'anotar a la dreta les línies d'on hem tret la primera i la segona fórmula.

Això és bastant lògic, no? Si sabem que és veritat que *plou*, i que és veritat que *fa sol*, aleshores no hi ha cap problema en dir que *plou i fa sol* (al mateix temps). Si alguna cosa no quadra, no és culpa nostra, sinó de qui ens ha dit que *plou* o que *fa sol*.

Fixa't que agafant les línies al revés pots obtenir $B \wedge A$, i que agafant la mateixa línia pots arribar a $A \wedge A$ i $B \wedge B$, que també són certes.

4.3 Eliminació de la conjunció

Això és justament l'operació contrària a l'anterior. Té dues parts. La primera:

n	$A \wedge B$	
	A	E$\wedge$ n

I la segona, per si vols extreure B:

n	$A \wedge B$	
	B	E$\wedge$ n

O sigui, que pots separar en vàries línies els *conjuntands* d'una conjunció (sí, s'utilitza aquesta paraulota). Per això la regla s'anomena *eliminació de la conjunció*, perquè d'una línia que conté símbols de conjunció ($\wedge$) treus altres que ja no ho tenen, suposadament en un intent per apropar-te a allò que vols demostrar.

4.4 Introducció de la implicació

Aquesta és més interessant, perquè permet fer quelcom útil amb les hipòtesis (aquelles subdemostracions que porten una barra vertical a l'esquerra). És:

$$\begin{array}{r|ll} \mathrm{m} & A & \mathrm{H} \\ \cline{2-2} \mathrm{n} & B & \\ \hline & A \Rightarrow B & \mathrm{I}{\Rightarrow}\ \mathrm{m,n} \end{array}$$

I el que vol dir és que si hem suposat alguna cosa (diguem-li A), i hem descobert (mitjançant les regles) que suposar A fa cert a B (el que sigui), llavors tenim una cosa clara: no podem assegurar que B sigui sempre cert, però sí que A implica B, que s'escriu $A \Rightarrow B$.

Això ens permet sortir de la subdemostració i continuar amb allò que estiguéssim fent. Recorda que no es pot acabar la deducció natural ficats a dins d'una subdemostració.

4.5 Eliminació de la implicació

Aquesta regla és més senzilla ja que no té a veure amb suposicions sinó amb fets:

$$\begin{array}{rll} \mathrm{m} & A \Rightarrow B & \\ \mathrm{n} & A & \\ \hline & B & \mathrm{E}{\Rightarrow}\ \mathrm{m,n} \end{array}$$

Simplement, si ens diuen que quan passa A també passa B (que és el que significa $A \Rightarrow B$), i també ens diuen que ara passa A, aleshores podem assegurar que B.

A aquesta regla també se l'anomena *modus ponens*.

4.6 Introducció de la disjunció

La disjunció (que és la *o*) és molt fàcil però no òbvia:

$$\begin{array}{rll} \mathrm{n} & A & \\ \hline & A \vee B & \mathrm{I}{\vee}\ \mathrm{n} \end{array}$$

Bé, per ser exacte, diré que també està disponible en l'altre ordre:

$$\begin{array}{rll} \mathrm{n} & A & \\ \hline & B \vee A & \mathrm{I}{\vee}\ \mathrm{n} \end{array}$$

Què bonic, no? Si sabem que "*avui és dijous*" també sabem que "*avui és dijous o les vaques volen*", "*avui és dijous o divendres*", o fins i tot "*avui és dijous... o no*". Totes són certes.

Recorda que, quan parlem, gairebé sempre s'utilitza la *o exclusiva* (*XOR*), que es compleix si un dels dos *disjuntands* és cert però no quan tots dos ho són alhora. Per a un lògic, la frase habitual "*avui és dijous o divendres*" és fa certa en tres casos: quan *avui és dijous*, quan *avui és divendres*, i quan *avui és dijous i divendres alhora* (una mica difícil al món real, però els matemàtics són capaços de fer tot tipus de suposicions...).

4.7 Eliminació de la disjunció

Aquesta és la regla més complicada, precisament perquè si ens donen una frase amb *o*, tal com "*avui és dijous o divendres*", què podem treure d'aquí? Que *avui és dijous*? No, podria ser divendres. Que *avui és divendres*? No, podria ser dijous. Que *avui és dijous o divendres*? Bé, és clar, però això ja ho sabíem...

La regla (ara l'explico):

m	$A \vee B$	
	$\quad A$	H
n	$\quad C$	
	$\quad B$	H
p	$\quad C$	
	C	E$\vee$ m,n,p

Necessitem més informació apart d'un $A \vee B$. Si, per casualitat, sabem que $A \Rightarrow C$, i que també $B \Rightarrow C$, aleshores sí que podem saber què passa quan $A \vee B$: tant una opció com l'altra ens porten a C, per tant C és certa.

Aquest tipus de coses només passen quan l'exercici està preparat per a què hi aparegui una *eliminació de la disjunció*, o quan A i B s'assemblen molt (llavors trobarem una C tal que totes dues l'impliquin).

Un exemple: quan vaig contractar l'accés a Internet per ADSL, va ser amb *Telefónica* o *Terra*, però no sé exactament amb qui (ni tan sols ells ho sabien). Qualsevol opció era lenta, caríssima, i plena de problemes (a tot això li diré M), per tant qualsevol companyia era una M. En concret, sabem que $Telefonica \Rightarrow M$, i que $Terra \Rightarrow M$, així que no hi ha dubtes sobre la qualitat de la meva connexió ADSL: també era una M, tant si la tenia amb una companyia com amb l'altra. I a més em va costar 9 mesos completar l'alta... sort que aquestes coses van passar ja fa molts anys.

A aquesta regla l'anomenen *prova per casos*, perquè s'ha de comprovar cada possible cas per veure que tots porten a la mateixa conclusió.

4.8 Introducció de la negació

Aquesta és molt maca i interessant:

$$\begin{array}{l|ll} \text{m} & A & \text{H} \\ \cline{2-2} \text{n} & B & \\ \text{p} & \neg B & \\ \hline & \neg A & \text{I}\neg\ \text{m,n,p} \end{array}$$

Si en suposar que A, has arribat a la conclusió que són certes B i $\neg B$ a la vegada, no estàs perdut, ja que acabes de descobrir una altra veritat: que no és possible que A sigui cert, per tant, que $\neg A$ és cert.

Per exemple, confesso que *si uso Windows, no aprofito el temps que estic amb l'ordinador*. Des de fa anys *sí que l'aprofito*, per tant la conclusió és que *no uso Windows*. Per arribar a aquesta conclusió, el camí que hauries seguit (potser sense pensar-hi) és precisament el que demana aquesta regla: suposem que *sí que utilitzo Windows*, en aquest cas *no aprofitaria el meu ordinador*. Però dic que *sí que ho aprofito*, així que la suposició ha de ser equivocada.

A aquest procediment se l'anomena *reducció a l'absurd* (*reductio ad absurdum*): suposar quelcom per arribar a una contradicció i poder afirmar que allò suposat és fals. Va molt bé si comences suposant *allò contrari* al que vols demostrar: si arribes a una contradicció, ja està gairebé tot fet.

He d'avisar de que aquest és un *abús de notació*: resulta que per a que quadrin els teoremes de la lògica, tota subdemostració ha de tenir *una* conclusió (no dues); i en aquesta hipòtesi que surt a la regla de dalt, no queda clar quina és la conclusió (si B o $\neg B$). La forma correcta d'escriure-ho seria usar la *introducció de la conjunció* per dir que $B \wedge \neg B$, i aquesta és la conclusió que ens fa veure que la hipòtesi inicial era errònia. Però els meus professors s'estalviaven aquesta línia.

4.9 Eliminació de la negació

Aquesta és molt senzilla, però cal dir-la:

$$\begin{array}{lll} \text{n} & \neg\neg A & \\ \hline & A & \text{E}\neg\ \text{n} \end{array}$$

O sigui, que quan veiem la negació de la negació d'alguna cosa, podem treure aquestes dues negacions seguides.

Recorda que la negació de "*això és blanc*" no és pas "*això és negre*" sinó "*això no és blanc*".

4.10 No hi ha més regles

Doncs ja està, no n'hi ha més de bàsiques. Encara hi ha algunes que parlen de *quantificadors* i dos de *cert* i *fals*, que explico més endavant, però amb aquestes nou ja es pot intentar demostrar la validesa de qualsevol seqüent d'aquest document (excepte els que tenen quantificadors...).

Recorda altre cop que no hi ha més regles: no pots canviar de $A \vee \neg A$ a $\blacksquare$ (*cert*) directament, ni de $\neg(A \vee B)$ a $\neg A \wedge \neg B$, ni usar la propietat distributiva, associativa, o commutativa. Ho has de fer tot pas a pas; ni tan sols els canvis senzills estan permesos (de moment). Per què? Perquè potser no són tan senzills com creus: ja ho veuràs quan et toqui demostrar que $A \vee \neg A$ és sempre cert... (està a la següent secció).

5 Exercicis explicats

Exercicis de molts nivells explicats pas a pas. Si encara vols més exemples (però sense comentar), mira l'última secció. El que intento explicar aquí no són les regles, sinó el com s'ha de pensar per a que et vingui al cap la idea màgica que ho soluciona.

Això és el que més vaig trobar a faltar quan havia d'estudiar deducció natural.

5.1 Un molt senzill. $P,\ P \Rightarrow Q \vdash P \wedge Q$

La solució a $P,\ P \Rightarrow Q \vdash P \wedge Q$ és:

1	P	
2	$P \Rightarrow Q$	
3	Q	E$\Rightarrow$ 2,1
4	$P \wedge Q$	I$\wedge$ 1,3

Aquí no hem de pensar molt, només cal usar bé les regles i les seves justificacions.

El primer és entendre el que ens han dit: diuen que ara passen *dues* coses, la primera és que P i la segona és que $P \Rightarrow Q$ (són les dues fórmules que hi ha a l'esquerra del $\vdash$). Aquestes dues coses les hem d'apuntar, una per línia, perquè en aquesta demostració seran sempre certes (ens agradi o no).

L'objectiu d'aquesta demostració és saber que $P \wedge Q$ també és cert, perquè ens han contat que quan P i $P \Rightarrow Q$ són certs, llavors $P \wedge Q$ també, i volem comprovar si això és veritat. Al final ho hem aconseguit, perquè a l'última línia hi surt escrit el $P \wedge Q$.

I ara com seguim? Ens hem de fixar en on volem arribar. Si $P \wedge Q$ ha de ser cert, llavors tant P com Q ho hauran de ser; doncs preocupem-nos primer per demostrar que ho són.

P és cert, perquè ens ho han dit, i ho tenim apuntat a la línia 1.

Però no ens han dit que Q ho sigui. Què ens han dit sobre Q? Buscant-la a les línies 1 i 2, l'únic que coneixem és que Q és certa quan passa P (ho diu a la 2). I com P és certa, podem usar una de les regles per deduir Q a partir del $P \Rightarrow Q$ i de P. Fixa't en què és el més important que ha passat en canviar de $P \Rightarrow Q$ a Q: s'ha deixat d'usar el símbol de la implicació; així que la regla que necessitem s'anomena *eliminació de la implicació*.

Per utilitzar aquesta regla, mirem la seva definició, i veiem que hem de posar en una nova línia la Q, i com a justificació s'ha d'escriure $E \Rightarrow\ 2,1$. La E ve d'*eliminació*, el $\Rightarrow$ és per *implicació*, el primer número és el de la línia que conté implicació ($P \Rightarrow Q$), i el segon número és el de la línia que conté la veritat coneguda (P). És incorrecte posar-los al revés ($E \Rightarrow\ 1,2$), perquè a la definició de la regla diu que la línia que conté la implicació ha de ser citada en primer lloc.

Ja hem aplicat la regla, i ja sabem tres coses que són certes: que P, que $P \Rightarrow Q$, i que Q. Totes són igual de certes. Ara estem més a prop de l'objectiu, $P \wedge Q$, perquè ja sabem que P i Q són certes, així que $P \wedge Q$ també ha de ser-ho (és obvi). A la fórmula que busquem hi ha un signe de conjunció ($\wedge$) que no tenim, per tant cal usar la *introducció de la conjunció* per afirmar que $P \wedge Q$ és cert perquè P ho és i Q també. Com a justificació posem $I \wedge\ 1,3$ (la línia on diu que P, i on diu que Q). No val posar $I \wedge\ 3,1$, això seria per assegurar que $Q \wedge P$, que no és el que ens demanen demostrar.

Llavors ja sabem que 4 coses són certes: P, $P \Rightarrow Q$, Q, i $P \wedge Q$. Podríem continuar descobrint encara més coses certes, però és que ja hem acabat, perquè ens demanaven demostrar que $P \wedge Q$ és cert i ja ho hem aconseguit (a la línia 4). Per tant, aquesta serà l'última línia, i no s'ha d'escriure res més.

Ah, un exemple d'això amb paraules: "*ara és estiu, i a l'estiu fa calor. Per això ara és estiu i fa calor*".

5.2 Una mica més complicat. $P \wedge Q \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow P,\ Q \vdash R$

Prova a fer tu sol el $P \wedge Q \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow P,\ Q \vdash R$. Després mira la solució:

1	$P \wedge Q \Rightarrow R$	
2	$Q \Rightarrow P$	
3	Q	
4	P	E$\Rightarrow$ 2,3
5	$P \wedge Q$	I$\wedge$ 4,3
6	R	E$\Rightarrow$ 1,5

L'única forma que hi ha d'arribar a R és usant la primera fórmula, $P \wedge Q \Rightarrow R$, però només la podem usar quan $P \wedge Q$ és cert, per tant anem a per això.

Sabem que $Q \Rightarrow P$ (línia 2) i que Q (línia 3), així que deduïm que P. Com que ara P és cert i Q també, $P \wedge Q$ també ho és. Fins aquí és semblant a l'exercici anterior.

Per últim, tenim que $P \wedge Q \Rightarrow R$, i sabem que $P \wedge Q$, per tant acabem dient que R.

5.3 Començant a suposar coses. $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$

Aquest, $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$, és més interessant:

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$Q \Rightarrow R$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad R$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\quad Q \wedge R$	I$\wedge$ 4,5
7	$P \Rightarrow Q \wedge R$	I$\Rightarrow$ 3,6

Fixa't en els següents detalls:

- No ens donen cap informació sobre què passa ara (ni han donat la fórmula P, ni $Q \wedge R$, etc.). Només ens diuen coses com que *si passés P, llavors també passaria Q*.
- De la mateixa forma, el que hem de demostrar no és que *ara mateix passa alguna cosa*, sinó que *si passa P, llavors Q i R són certes*.
- $P \Rightarrow Q \wedge R$ és una implicació (*una cosa implica una altra*), perquè l'operador $\Rightarrow$ té menys prioritat que el $\wedge$. És un error greu interpretar aquesta fórmula com $(P \Rightarrow Q) \wedge R$.

Ja que la fórmula que volem és una implicació ($P \Rightarrow Q \wedge R$), haurem d'usar la *introducció de la implicació*, però aquesta regla requereix tenir una subdemostració (consulta la seva definició).

No és gens complicat entendre per què: $P \Rightarrow Q \wedge R$ diu que *si passa P, llavors passa $Q \wedge R$*, així que el primer que caldrà fer serà suposar que sí que passa P. Llavors haurem de trobar que, en aquest cas en què P és cert, també ho és $Q \wedge R$. Quan ho aconseguim, apliquem la regla, i ho deixem ben escrit: $P \Rightarrow Q \wedge R$.

Per això a la línia 3 es fa una hipòtesi (justificada amb la H a la dreta): suposem que P és cert. Ara comencem una subdemostració, on podem usar les veritats que hi ha escrites a la demostració pare (línies 1 i 2 en aquest cas), i també podem usar P com si fos veritat.

Hem fet aquesta hipòtesi amb l'objectiu de saber que $Q \wedge R$, per tant ho deduïm igual que als exemples anteriors. Fixa't que usem veritats de dins i de fora de la subdemostració, i que, mentre no l'acabem, s'ha de posar aquella ratlla vertical a l'esquerra.

A la línia 6 ja tenim el $Q \wedge R$, que és el que volíem. Usant la regla de *introducció de la implicació*, podem sortir d'aquesta subdemostració dient que *si la hipòtesi és certa, llavors tot allò que hem deduït a partir d'ella també*. Es deixa de posar la ratlleta vertical, perquè $P \Rightarrow Q \wedge R$ és cert sempre (no depèn de si P és veritat o no). La justificació usada, $I \Rightarrow \ 3, 6$, diu que 3 és la línia on hem fet la suposició, i 6 la línia on hem descobert quelcom interessant que passa en fer aquesta suposició.

$P \Rightarrow Q \wedge R$ és el que volíem, per tant ja hem acabat. I acabem de la mateixa forma que sempre, perquè estem fora de tota subdemostració.

5.4 Usant la iteració. $P \vdash Q \Rightarrow P$

Aquest és molt curt: $P \vdash Q \Rightarrow P$. Solució:

1	P	
2	$\quad \mid Q$	H
3	$\quad \mid P$	IT 1
4	$Q \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 2,3

El camí és directe: hem de suposar Q, i acabar veient que, en aquest cas, és cert P. El truc: P és sempre cert, tant si suposem Q com si no.

Haurem d'usar la *introducció de la implicació*, però això requereix tenir una hipòtesi, i, línies més avall, el resultat d'haver suposat això. És llavors quan podem tancar la hipòtesi.

Després d'obrir-la (línia 2), haurem de fer alguna cosa per deixar escrit que P. Com ja ho tenim escrit a la línia 1, simplement posem la P altre cop i ho justifiquem amb IT 1, que vol dir "*això ho he copiat de la línia 1*". El IT és per *iteració*.

Ja complim els requisits per aplicar la regla, així que l'apliquem, sortim de la subdemostració, i hem acabat.

5.5 Reducció a l'absurd. $P \Rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$

Aquesta és una tècnica molt útil. La validesa de $P \Rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$ es demostra amb:

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$\neg Q$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad \neg Q$	IT 2
6	$\neg P$	I$\neg$ 3,4,5

A on s'ha d'arribar és a $\neg P$, que és *la negació d'alguna cosa*, per això s'haurà d'utilitzar la regla de *introducció de la negació*, coneguda per *reducció a l'absurd*.

La forma de fer-ho serà suposar el contrari de $\neg P$ (que és P) i arribar a una contradicció. En suposar P arribarem a Q (per *eliminació de la implicació*), i com que també tenim $\neg Q$, podem aplicar la regla. Aquest $\neg Q$ l'haurem de repetir a dintre la subdemostració amb la regla d'*iteració*, per a que estigui junt amb la Q però també *dins* de la subdemostració. Tot el que hi ha a dins de la subdemostració és conseqüència de P, així que és important veure que tant Q com $\neg Q$ ho són.

Per a la *introducció de la negació*, la forma de justificar la regla és posant el número de línia on comença la suposició (errònia), i els números de les dues línies on hem vist la contradicció. La conclusió d'aquesta regla és el contrari d'allò que s'havia suposat, en aquest cas $\neg P$, per tant ja podem acabar el procediment.

Aquest raonament normalment el fem sense pensar-hi gaire. En paraules seria semblant a: "*és clar que $\neg P$, perquè si fos P llavors Q, i em diuen que $\neg Q$, així que no pot ser P*".

5.6 Amb subdemostracions. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Es compliquen les coses. La solució de $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$:

1	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	
2	$\quad Q$	H
3	$\quad\quad P$	H
4	$\quad\quad Q \Rightarrow R$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad\quad R$	E$\Rightarrow$ 4,2
6	$\quad P \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,5
7	$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	I$\Rightarrow$ 2,6

Primerament: aquí només usarem les dues regles que ajuden a afegir i treure implicacions, perquè és l'únic operador que tenim.

Com que volem arribar a $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$, haurem de fer una hipòtesi Q dins la qual s'ha de demostrar $P \Rightarrow R$. Doncs fem això ara per simplificar el problema: obrim la subdemostració a la línia 2. No la tancarem fins que no s'arribi a saber que $P \Rightarrow R$ és cert.

Ara el problema és una mica més fàcil. Necessitem comprovar que $P \Rightarrow R$, i tenim dues línies amb dues veritats: la primera diu que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$, i la segona diu que Q.

Com podem aconseguir el $P \Rightarrow R$? Doncs com sempre: s'ha de suposar que P, i aconseguir veure que R, d'alguna manera. Encara que no sembli molt fàcil, és el que s'ha de fer, perquè la *introducció de la implicació* va així. Per tant, anem a obrir una altra hipòtesi, ara suposant que P, i anem a veure si arribem a R. Aquesta serà una hipòtesi dins d'una hipòtesi, però no hi ha cap problema en fer això.

Després d'escriure la línia 3, i, ficats a dins d'una *subsubdemostració*, tenim al nostre abast que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$, que Q, i que P. Hem de provar que R. Ja no sembla tan difícil, no? Si sabem que P, podem usar l'*eliminació de la implicació* amb la línia 1, i així aconseguirem la fórmula certa $Q \Rightarrow R$. Com també és cert Q (línia 2), podem tornar a usar la mateixa regla per saber que R.

Hem vist que el suposar P ens ha portat a la conclusió de que R, així que podem deixar escrit que $P \Rightarrow R$, que és allò que anàvem buscant. Ara ja hem sortit de la subsubdemostració, i només estem dins la suposició que Q és cert. Com veiem que aquesta suposició implica la certesa de la fórmula $P \Rightarrow R$, podem sortir d'aquesta subdemostració concloent que $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ és precisament el que s'havia de demostrar, per tant ja s'ha acabat.

5.7 Un de prova per casos. $P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$

S'haurà d'usar la regla més complicada: l'*eliminació de la disjunció*. $P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$ solucionat:

1	$P \vee (Q \wedge R)$	
2	$\quad P$	H
3	$\quad P \vee Q$	I$\vee$ 2
4	$\quad Q \wedge R$	H
5	$\quad Q$	E$\wedge$ 4
6	$\quad P \vee Q$	I$\vee$ 5
7	$P \vee Q$	E$\vee$ 1,3,6

Ja coneixes les regles, així que explico la forma de pensar d'un humà que no entengui de deducció natural però que pensi una mica:

Necessitem comprovar que $P \vee Q$ és cert sempre. L'expressió de l'esquerra, $P \vee (Q \wedge R)$, es pot complir per dos motius:

- si es compleix perquè P és cert, llavors $P \vee Q$ és cert.

- si es compleix perquè $Q \wedge R$ és cert, és que Q i R són certes, i per tant $P \vee Q$ és cert gràcies a Q.

O sigui, que de qualsevol de les maneres, $P \vee Q$ és cert.

Doncs ara l'únic que queda és traduir a llenguatge lògic, seguint el mateix ordre en què s'ha pensat, i anant a poc a poc.

Es comença demostrant un camí, després l'altre, i per últim s'aplica la regla d'*eliminació de la disjunció*. Per justificar-la s'ha d'escriure la línia on està la disjunció, i les dues línies de dins de cada subdemostració on es vegi que tant en suposar una cosa com en suposar l'altra, el resultat és el mateix.

Fixa't que, encara que esbrinem que $P \Rightarrow P \vee Q$ i que $Q \wedge R \Rightarrow P \vee Q$, no fa falta usar la *introducció de la implicació* per deixar-ho escrit.

El més complicat de la *prova per casos* sol ser decidir quina expressió demostraràs en ambdós casos. Ha de ser la mateixa als dos casos!

5.8 Un per pensar-hi. $L \wedge M \Rightarrow \neg P,\ I \Rightarrow P,\ M,\ I \vdash \neg L$

Intenta fer $L \wedge M \Rightarrow \neg P,\ I \Rightarrow P,\ M,\ I \vdash \neg L$ de cap; després escriu-lo en paper. Queda:

1	$L \wedge M \Rightarrow \neg P$	
2	$I \Rightarrow P$	
3	M	
4	I	
5	$\quad L$	H
6	$\quad L \wedge M$	I$\wedge$ 5,3
7	$\quad \neg P$	E$\Rightarrow$ 1,6
8	$\quad P$	E$\Rightarrow$ 2,4
9	$\neg L$	I$\neg$ 5,7,8

L'expresso per paraules: "*si uses Linux i Mozilla com a navegador, t'evites els problemes. En canvi, si uses Internet Explorer tindràs problemes. Ara tu uses Mozilla, però també Internet Explorer a vegades. Per tant, sé que no uses Linux*".

Potser sembla evident: "*és clar, perquè IE no està en Linux*", però fixa't que no he dit això en cap moment. No hi surt el $I \Rightarrow \neg L$ enlloc.

La forma en què hauries de pensar mentre prepares l'exercici és:

1. Necessito demostrar $\neg L$, que és la negació d'alguna cosa. No es veu cap regla de la forma *quelcom implica* $\neg L$ que em permeti obtenir-ho directament. S'haurà de fer d'una altra forma, per exemple amb la *introducció de la negació* (*reducció a l'absurd*): suposem que sí que uso Linux.

2. En el cas de que usés Linux, usaria Linux i Mozilla, perquè ja usava Mozilla abans (és la tercera veritat que hi surt escrita a l'enunciat).
3. En usar Linux i Mozilla, no tindria problemes informàtics, perquè $L \wedge M \Rightarrow \neg P$.
4. Però també usava Internet Explorer (quarta veritat), i com que IE genera problemes, jo tindré problemes. P.
5. He arribat a una contradicció: $\neg P$ i P. Per tant, el que passa és que la suposició que he fet de que uso Linux és incorrecta: resulta que $\neg L$.

Doncs ara només s'ha de seguir el mateix procediment, però escrivint-ho pas per pas i usant les regles. S'obtindrà la mateixa figura que surt a dalt, que casualment té 5 línies de procediment (les 4 primeres són només per copiar les veritats). Cada línia es correspon amb els passos que he explicat aquí.

5.9 La part esquerra buida. $\vdash P \Rightarrow P$

Demostrar $\vdash P \Rightarrow P$ és molt fàcil i curt:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \quad\vert\; P & \mathrm{H} \\
\cline{2-2}
2 & \quad\vert\; P & \mathrm{IT}\ 1 \\
3 & P \Rightarrow P & \mathrm{I}\!\Rightarrow 1{,}2
\end{array}
$$

Aquest cas encara no havia sortit: resulta que el costat esquerre del seqüent està buit. Això vol dir que no ens donen cap veritat en què basar-nos per demostrar que $P \Rightarrow P$. Per què? Doncs perquè $P \Rightarrow P$ és cert sempre, sense importar el valor de P o de la resta de fórmules.

És molt més còmode i interessant resoldre una d'aquestes demostracions, perquè pots començar a treballar directament en la fórmula a la qual vols arribar. Però ves amb compte, perquè hi ha algunes *veritats absolutes* (de les que són certes sempre) molt difícils i llargues de demostrar.

Apunta: sempre que la part esquerra estigui buida, s'ha de començar amb una hipòtesi (quina altra cosa podríem fer?).

Per aconseguir provar que $P \Rightarrow P$ fem el de sempre: suposem que P i intentem arribar a veure que P és cert. Com ho hem just suposat a la primera línia, usem la regla de *iteració* per copiar-ho endins, i acabem la subdemostració mitjançant la *introducció de la implicació*. I ja està tot fet, en tres línies.

Fixa't en que $P \Rightarrow P$ és cert perquè $\blacksquare \Rightarrow \blacksquare$ i $\square \Rightarrow \square$. Ja de pas, recordo que també $\square \Rightarrow \blacksquare$, però $\blacksquare \not\Rightarrow \square$.

5.10 Suposar el contrari. $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$

Un altre de senzill, $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$. Es fa així:

1	$P \land \neg P$	H
2	P	E$\land$ 1
3	$\neg P$	E$\land$ 1
4	$\neg(P \land \neg P)$	I$\neg$ 1,2

Tots sabem que no poden passar dues coses contràries alhora, però, com ho demostrem? S'ha d'utilitzar la *reducció a l'absurd*:

Suposem que sí que passa $P \land \neg P$. Llavors passa P i passa $\neg P$, els dos alhora, i això és una contradicció. Per tant, la suposició que hem fet no pot ser certa; o sigui que és falsa. Així es demostra que $\neg(P \land \neg P)$.

Quan vegis alguna cosa tan *clara* i *òbvia* com $\neg(P \land \neg P)$, aleshores el seu contrari serà *clarament* fals i absurd. Per tant, no et costarà molt demostrar que no s'aguanta i que es contradiu per si sol. Un cop fet això, podem assegurar que la fórmula original és certa ja que el seu contrari és fals.

5.11 Aquest sembla fàcil. $\vdash P \lor \neg P$

A veure si $\vdash P \lor \neg P$ és tan obvi com diuen:

1	$\neg(P \lor \neg P)$	H
2	P	H
3	$P \lor \neg P$	I$\lor$ 2
4	$\neg(P \lor \neg P)$	IT 1
5	$\neg P$	I$\neg$ 2,3,4
6	$\neg P$	H
7	$P \lor \neg P$	I$\lor$ 6
8	$\neg(P \lor \neg P)$	IT 1
9	$\neg\neg P$	I$\neg$ 6,7,8
10	P	E$\neg$ 9
11	$\neg\neg(P \lor \neg P)$	I$\neg$ 1,5,10
12	$P \lor \neg P$	E$\neg$ 11

Un dels més simples i llargs que he trobat. Sembla fins i tot que no faci falta demostrar-ho, perquè tothom sap que entre "*avui és dijous*" i "*avui no és dijous*", una de les dues és certa (no poden ser falses totes dues alhora).

Podríem començar pensant en el mètode de *prova per casos*, perquè de P podem deduir $P \lor \neg P$, i de $\neg P$ podem deduir $P \lor \neg P$, o sigui, la mateixa fórmula. Però no serveix de res, perquè la regla de *prova per casos* és la d'*eliminació de la* *disjunció*, i no tenim cap disjunció per eliminar; de fet, tampoc tenim la fórmula certa $A \lor B$ tal que $A \Rightarrow C$ i $B \Rightarrow C$, com demana la regla. En realitat, no tenim cap fórmula que sapiguem que sigui certa (el costat esquerre del seqüent està buit).

Sabem que s'ha de començar amb una hipòtesi (no hi ha altra alternativa). Com sembla bastant clar que $P \lor \neg P$ és cert, també pot semblar fàcil demostrar que el seu contrari, $\neg(P \lor \neg P)$, és fals. Així que usarem la *reducció a l'absurd*: fent aquesta suposició a la línia 1, hem d'intentar arribar a una contradicció, la que sigui.

Jo em vaig proposar arribar a la contradicció $\neg P$ i P. Però no tenim cap d'aquestes dues fórmules; d'on les traiem? Doncs tornem a fer *reducció a l'absurd*: per veure que $\neg P$, anem a suposar que P per arribar a una contradicció. Igual que en altres ocasions, va molt bé aprofitar les possibilitats que ofereix la *introducció de la disjunció*: en suposar que P, podrem convertir-lo en $P \lor \neg P$ per buscar la contradicció. Com tenim el $\neg(P \lor \neg P)$ dalt de tot, el podem usar per acabar demostrant que $\neg P$. El mateix farem per demostrar que P, però aquest cop suposant $\neg P$.

Quan ja hem arribat a tenir P i $\neg P$ després de suposar $\neg(P \lor \neg P)$, es veu que aquesta fórmula no pot ser certa, així que la seva negació, $\neg\neg(P \lor \neg P)$, ho és. Per *eliminació de la negació*, ens queda la fórmula que buscàvem: $P \lor \neg P$.

Ho he fet d'aquesta manera per a que quedés bastant simètric, però es pot fer més curt si es busca altra contradicció, per exemple $P \lor \neg P$ i $\neg(P \lor \neg P)$. Llavors quedaria així:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \quad \neg(P \lor \neg P) & \text{H} \\
2 & \qquad P & \text{H} \\
3 & \qquad P \lor \neg P & \text{I}\lor\ 2 \\
4 & \qquad \neg(P \lor \neg P) & \text{IT } 1 \\
5 & \quad \neg P & \text{I}\neg\ 2,3,4 \\
6 & \quad P \lor \neg P & \text{I}\lor\ 5 \\
7 & \quad \neg(P \lor \neg P) & \text{IT } 1 \\
8 & \neg\neg(P \lor \neg P) & \text{I}\neg\ 1,6,7 \\
9 & P \lor \neg P & \text{E}\neg\ 8
\end{array}
$$

5.12 Un d'interessant. $P \lor Q,\ \neg P \vdash Q$

Un altre que sembla fàcil: $P \lor Q,\ \neg P \vdash Q$. A veure:

$$
\begin{array}{lll}
1 & P \lor Q & \\
2 & \neg P & \\
3 & \mid\ P & \text{H} \\
4 & \mid\ \mid\ \neg Q & \text{H} \\
5 & \mid\ \mid\ \neg P & \text{IT } 2 \\
6 & \mid\ \mid\ P & \text{IT } 3 \\
7 & \mid\ \neg\neg Q & \text{I}\neg\ 4,5,6 \\
8 & \mid\ Q & \text{E}\neg\ 7 \\
9 & \mid\ Q & \text{H} \\
10 & \mid\ Q & \text{IT } 9 \\
11 & Q & \text{E}\lor\ 1,8,10
\end{array}
$$

És molt senzill d'entendre per qualsevol: es compleix $P \lor Q$, però P és fals, per tant el cert és Q.

Es pot fer de moltes formes, però en algun moment hauràs de fer servir l'*eliminació de la disjunció* per tal d'usar el $P \lor Q$. Intentarem provar que tant P com Q porten al mateix lloc, que serà la nostra fórmula objectiu Q (ja que es pot, anem directament a per Q).

Obrim la subdemostració suposant que P, i hem de veure que Q. No és molt difícil perquè tenim el $\neg P$ a la línia 2; això ajuda a contradir tot allò que vulguem. Com el que busquem és Q, suposem $\neg Q$ i per *reducció a l'absurd* obtenim $\neg\neg Q$, que és Q.

L'altre camí, quan es suposa que Q és cert, ens porta directament a Q.

Per tant, ambdós camins van a Q i per *eliminació de la disjunció* demostrem que Q és cert sempre.

5.13 Aquest me'l van posar a un examen. $A \lor B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \lor D$

A l'examen final d'*ILO* em van posar $A \lor B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \lor D$, i vaig passar molta, molta estona fins que em va sortir:

1	$A \lor B$	
2	$A \Rightarrow C$	
3	$\neg D \Rightarrow \neg B$	
4	$\mid A$	H
5	$\mid C$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\mid C \lor D$	I$\lor$ 5
7	$\mid B$	H
8	$\mid \mid \neg D$	H
9	$\mid \mid \neg B$	E$\Rightarrow$ 3,8
10	$\mid \mid B$	IT 7
11	$\mid \neg\neg D$	I$\neg$ 8,9,10
12	$\mid D$	E$\neg$ 11
13	$\mid C \lor D$	I$\lor$ 12
14	$C \lor D$	E$\lor$ 1,6,13

Fixa't en que el resultat que busquem, $C \lor D$, és una disjunció. Com ja coneixes la *introducció de la disjunció*, podries buscar simplement que C, i després utilitzar aquesta regla per treure $C \lor D$. O si no trobessis que C és certa, doncs podries provar amb D, perquè si D és certa llavors $C \lor D$ ho és i hem acabat.

Desgraciadament, C no és certa sempre, i D tampoc és certa sempre (en canvi $C \lor D$ sí que ho és sempre, i això és precisament el que volem demostrar). Després d'entendre això, s'haurà de buscar un altre mètode que treballi amb les dues fórmules C i D, al mateix temps, perquè sembla que si agafem una sola sense mirar l'altra, no proporciona molta informació.

Per usar el $A \lor B$ s'haurà de fer la *prova per casos*. Intentarem arribar a que tant A com B condueixen a $C \lor D$, perquè si ho aconseguim ja haurem acabat.

A implica C, i si C és cert també ho és $C \lor D$, per tant A implica $C \lor D$.

Sobre B, el poc que sabem no la relaciona amb C sinó amb la D. Volem $C \lor D$. Difícilment aconseguirem que $C \lor D$ es compleixi gràcies a C, així que intentarem que sigui D la certa. Per fer-ho, usem *reducció a l'absurd*: suposem que D és fals, llavors es compleix $\neg B$ per la fórmula de la línia 3. Però érem sota la suposició que B era cert, així que la nostra hipòtesi $\neg D$ no pot ser certa, i llavors D és certa, i per tant $C \lor D$ també.

Com $A \lor B$ és cert, i tots dos camins ens porten a $C \lor D$, acabem veient que $C \lor D$ sempre és cert.

Si tens pràctica treballant amb fórmules lògiques, hauràs vist que $\neg D \Rightarrow \neg B$ és $B \Rightarrow D$. Això simplifica molt el problema i ajuda a entendre'l abans. De totes formes, no pots canviar $\neg D \Rightarrow \neg B$ per $B \Rightarrow D$ directament, sinó que s'ha de fer pas a pas.

5.14 Un "curt". $A \iff B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Sembla fàcil: si dues expressions són equivalents, és perquè són ambdues certes, o ambdues falses. He pogut demostrar la validesa de $A \iff B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ així:

1	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	
2	$\mid\ \neg(A \vee \neg A)$	H
3	$\mid\ \mid\ A$	H
4	$\mid\ \mid\ A \vee \neg A$	I$\vee$ 3
5	$\mid\ \mid\ \neg(A \vee \neg A)$	IT 2
6	$\mid\ \neg A$	I$\neg$ 3,4,5
7	$\mid\ A \vee \neg A$	I$\vee$ 6
8	$\mid\ \neg(A \vee \neg A)$	IT 2
9	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	I$\neg$ 2,7,8
10	$A \vee \neg A$	E$\neg$ 9
11	$\mid\ A$	H
12	$\mid\ A \Rightarrow B$	E$\wedge$ 1
13	$\mid\ B$	E$\Rightarrow$ 12,11
14	$\mid\ A \wedge B$	I$\wedge$ 11,13
15	$\mid\ (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	I$\vee$ 14
16	$\mid\ \neg A$	H
17	$\mid\ \mid\ B$	H
18	$\mid\ \mid\ B \Rightarrow A$	E$\wedge$ 1
19	$\mid\ \mid\ A$	E$\Rightarrow$ 18,17
20	$\mid\ \mid\ \neg A$	IT 16
21	$\mid\ \neg B$	I$\neg$ 17,19,20
22	$\mid\ \neg A \wedge \neg B$	I$\wedge$ 16,21
23	$\mid\ (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	I$\vee$ 22
24	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	E$\vee$ 10,15,23

Primer: no va bé escriure $A \iff B$ perquè no tenim regles per al $\iff$.

Com que gairebé no s'usa, quan surt un $\iff$ es permet canviar-lo per $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, que és el mateix.

Bé, això és l'únic que se m'ha acudit... Et deixo com a exercici el buscar una manera més curta (si és que n'hi ha). El que jo he fet és deixar escrit que $A \vee \neg A$ és cert (aquest exercici ja ha sortit, aquí he repetit els mateixos passos). Un cop sé que es compleix $A \vee \neg A$, veig que tant el cas A com el cas $\neg A$ porten a la mateixa fórmula, que és la solució.

6 Coses incorrectes

Errors comuns que no has de cometre. Recorda que un professor de lògica corregirà els teus exercicis amb un *cert* o un *fals*, així que aprèn a fer-ho perfecte.

6.1 Introducció i eliminació d' *"allò que em vagi bé"*

Les regles de *introducció* i *eliminació* no són per a que puguis escriure tot el que tu vulguis, sinó per ajudar-te a utilitzar o generar una fórmula amb un operador concret.

Per tant, si tens P no pots dir "*doncs ara faig* introducció de negació *i obtinc $\neg P$, que és el que em feia falta*". Hi ha uns quants requisits per cada regla, i si no es satisfan, no la pots aplicar.

Exemple: la regla d'*eliminació de la implicació* no permet accedir així a les fórmules de la primera línia.

1	$P \Rightarrow Q \wedge R$		$\otimes$ *INCORRECTO* $\otimes$
2	$Q \wedge R$	E$\Rightarrow$ 1,1	

Per poder fer-ho, s'hauria d'estar segur de que P és cert sempre; llavors sí que es podria aplicar la regla, escrivint bé els números de línia.

6.2 Iterar una fórmula d'una subdemostració no accesible

A dins de la demostració principal (la qual va de la primera a l'última línia), podem obrir *demostracions filles* (*subdemostracions*). Dins d'una subdemostració també podem tenir una *subsubdemostració*, que tindria com pare a la subdemostració i com avi a la demostració principal.

Per a il·lustrar, aquí poso l'exemple de $A \vee B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \vee D$:

1	$A \vee B$	
2	$A \Rightarrow C$	
3	$\neg D \Rightarrow \neg B$	
4	$\mid\ \underline{A}$	H
5	$\mid\ C$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\mid\ C \vee D$	I$\vee$ 5
7	$\mid\ \underline{B}$	H
8	$\mid\ \mid\ \underline{\neg D}$	H
9	$\mid\ \mid\ \neg B$	E$\Rightarrow$ 3,8
10	$\mid\ \mid\ B$	IT 7
11	$\mid\ \neg\neg D$	I$\neg$ 8,9,10
12	$\mid\ D$	E$\neg$ 11
13	$\mid\ C \vee D$	I$\vee$ 12
14	$C \vee D$	E$\vee$ 1,6,13

Doncs bé, una demostració qualsevol només pot accedir a les fórmules de dins de si mateixa, a les del seu pare, a les del pare del seu pare, a les del pare del pare del seu pare, ... Em sembla que a tots aquest se'ls diu *ancestres*, així que: *una demostració pot accedir a si mateixa i als seus ancestres.*

Per exemple, si estem a la línia 10, les regles poden usar fórmules dels següents llocs:

- de la demostració actual (línies 8 i 9 ara per ara).
- de la demostració pare de la 8-10, o sigui, de la línia 7.
- de la demostració pare de la que comença a la línia 7, o sigui, línies 1 a 3.

En cap cas pot usar les fórmules de les línies 4 a 6, que és la demostració *oncle/tia* de l'actual (germana del pare), perquè tota aquella demostració es basa en la hipòtesi que A (línia 4), i ja hem deixat de fer aquella suposició.

En llenguatge lògic, es diu que una fórmula A és *actual* en la fórmula B si estant en B es pot usar A. Per que això sigui possible, A s'ha d'haver escrit abans que B, i algun ancestre de B ha de ser pare de A.

O sigui, que per demostrar $P \wedge Q$ no es pot fer això:

1	$\mid\ P$	H
2	$\mid\ \mid\ Q$	H
3	$\mid\ \mid\ P \wedge Q$	I$\wedge$ 1,2
4	$P \wedge Q$	IT 3

$\otimes$ *INCORRECTO* $\otimes$

6.3 Posar malament els parèntesis

Quan he escrit les definicions de les regles, he usat les lletres A i B, però aquestes poden representar qualsevol expressió.

Per exemple, aquí es fa la *introducció de la negació*, on -segons la regla- es suposa una fórmula A, s'arriba a una contradicció, i es conclou que $\neg A$, o sigui, la fórmula original, però negada. Vegem:

1	$\mid\ P \Rightarrow Q$	H
...	$\mid\ \ldots$	
7	$\neg P \Rightarrow Q$	I$\neg$ 1,...

$\otimes$ *INCORRECTO* $\otimes$

Suposo que queda clar que el A que surt a la regla representa a $P \Rightarrow Q$ en aquest exemple. El problema el tenim quan fem el $\neg A$. La negació de $P \Rightarrow Q$ no és $\neg P \Rightarrow Q$, sinó $\neg(P \Rightarrow Q)$. És necessari el parèntesi perquè si no es posa, només afecta a P.

Si no saps quan posar parèntesis, posa'ls sempre i després treu els que no facin falta. Per exemple, si has d'escriure que $\neg P \vee R$ implica a $R \wedge Q$, envolta cada expressió en parèntesis i escriu $(\neg P \vee R) \Rightarrow (R \wedge Q)$. Així no t'has equivocat. Ara aprèn quan és possible treure els parèntesis, i treu tots els que puguis. En aquest cas, tots dos es poden treure i queda $\neg P \vee R \Rightarrow R \wedge Q$.

6.4 Acabar dins d'una subdemostració

No pots acabar la deducció dins d'una subdemostració. L'última línia no ha de tenir cap ratlleta vertical a l'esquerra.

La raó és que tot el que hi ha a dins de la subdemostració és vàlid només quan es compleix la suposició, i el que ens demanen a l'enunciat és demostrar que el que hi ha a la dreta del $\vdash$ es compleix *sempre*.

Exemple d'algú amb molta cara intentant demostrar $P \wedge Q$:

1	$\mid\ P$	H
2	$\mid\ \mid\ Q$	H
3	$\mid\ \mid\ P \wedge Q$	I$\wedge$ 1,2

$\otimes$ *INCORRECTO* $\otimes$

S'ha suposat que P, i també que Q. En aquest cas, és clar que $P \wedge Q$ és cert, però només en aquest cas. No podem assegurar a ningú que $P \wedge Q$ sigui cert sempre. Per tant, s'hauria d'anar tancant cada demostració (primer la de dins, i després la de fora) per intentar treure alguna conclusió que sigui vàlida sempre.

Tampoc es podria fer allò d'*iterar* en la línia 4. Ja ho he explicat fa alguns apartats.

6.5 Saltar-se passos

Encara que coneguis equivalències entre fórmules, és molt millor si no les uses. Per exemple, si et toca escriure la negació de $\neg P$, no pots posar P directament, sinó que s'ha de posar $\neg\neg P$.

Pensa que no tot és tan obvi com sembla, i que et poden demanar demostrar coses com $P \vdash \neg\neg P$, a on si poguessis usar les simplificacions, gairebé no hi hauria treball a fer.

Per exemple, passar de tenir $\neg(A \vee B)$ en una línia a tenir $\neg A \wedge \neg B$ a la següent no es pot justificar amb cap de les 9 regles. Però si aconsegueixes demostrar i comprendre que $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$, aleshores podries afegir-ho com una regla addicional per usar-la en futures demostracions. Dono vàries d'aquestes a la propera secció.

7 Complicant-ho una mica més

Aquí acabo d'explicar tot allò que em van ensenyar (tot i que no ho vam usar gaire). El tema dels quantificadors és important però més enrevessat.

7.1 Regles de cert i fals

Podem treballar directament amb els valors $\blacksquare$ (*cert*) i $\square$ (*fals*), i també ficar-los o fer-los fora de la nostra demostració amb regles senzilles.

7.1.1 Introducció de cert

Aquesta és la més fàcil que hi ha:

$$\frac{}{\blacksquare \qquad \mathrm{I}\blacksquare}$$

O sigui, que sempre, i sense cap requisit, podem deixar escrit que $\blacksquare$ és cert, perquè sempre ho és.

7.1.2 Eliminació de fals

Una regla molt divertida:

$$\frac{\mathrm{n} \quad \square}{A \qquad \mathrm{E}\square\ \mathrm{n}}$$

Explicació: si hem arribat a la conclusió de que $\Box$ és cert, llavors ja hem arribat a l'extrem en què podem inventar-nos qualsevol cosa i dir que és certa; al menys, tan certa com que $\Box$ (*fals*) és cert.

A aquesta regla li diuen *ex falso quodlibet sequitur*, que deu voler dir "*de fals pot sortir qualsevol cosa*".

7.2 Regles de quantificadors

Estem molt limitats si només podem usar P, Q, R, ... per traduir frases a llenguatge lògic. Els quantificadors ens permetran fer moltes més coses.

7.2.1 Què és això

No podré explicar-ho tot perquè fa falta entendre molts conceptes previs, però ho dic una mica per sobre. El primer, uns canvis:

Ara no només parlarem de coses generals (*plou*, *fa calor*, etc.), sinó que tindrem un *domini* de coses conegudes, i haurem de dir quina propietat és certa per a cada element.

Exemple: tenim el domini $\{p,\ t,\ r\}$, que representen a la pantalla, el teclat, i el ratolí d'un ordinador.

Afegim una *lletra de predicat* (ja no es diuen *lletres proposicionals*) E, tal que quan posem Ex (llegit "E *de* x", escrit tot junt) volem dir que x *és un dispositiu d'entrada*. També tenim Sx per dir que x *és un dispositiu de sortida*, i Tx que significarà x *necessita tinta per funcionar*.

Ara sabem que es compleixen Et, Er, Sp i cap més.

Els quantificadors ens permetran escriure veritats que facin referència a alguns elements del domini. N'hi ha dos, de quantificadors:

- El quantificador universal: $\forall$. Quan es posa $\forall x Px$ ("*per tot* x, P *de* x"), es vol dir que tots els elements del domini compleixen la propietat P.
- El quantificador existencial: $\exists$. $\exists x Px$ ("*existeix un* x *tal que* P *de* x") vol dir que al menys un element del domini fa certa la propietat P.

Per exemple, aquí són certes les següents fórmules: $\forall x(Ex \lor Sx)$, $\neg\exists x Tx$, $\forall x(Tx \Rightarrow \neg Ex)$, $\exists x Ex \land \exists x Sx$ i moltes més. Els quantificadors tenen tanta prioritat com el $\neg$.

Les regles explicades aquí treballaran amb *substitucions lliures*. Ho sento per no explicar què és, però és que no em vull sortir del tema.

7.2.2 Introducció de l'existencial

Si veiem una prova de la seva existència, podem dir que una propietat es compleix per algun element:

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A\{t/x\} & \\ \hline & \exists x A & \text{I}\exists \text{ n,t} \end{array}$$

Això de $A\{t/x\}$ és una *substitució* (es llegeix "*t sobre x*" i consisteix en canviar x per t).

Aquesta regla diu que si veiem At, on t és un element, podem dir que $\exists x Ax$, perquè sabem que quan x és t sí que es compleix.

7.2.3 Eliminació de l'existencial

Treure quelcom cert d'un $\exists x Px$ costa, però es fa així:

$$
\begin{array}{ll|ll}
\mathrm{m} & \multicolumn{2}{l}{\exists x A} & \\
\mathrm{n} & & A\{a/x\} & \mathrm{H} \\
\cline{3-3}
\mathrm{p} & & B & \\
\hline
 & B & & \mathrm{E}\exists\ \mathrm{m,n,p,a}
\end{array}
$$

O sigui, que si un dels A implica B, llavors sabem que B, perquè sabem que un dels A és cert. No ha d'aparèixer cap a en B ni en cap hipòtesi accesible (perdó per les frases críptiques; són part de la teoria).

7.2.4 Introducció de l'universal

Aquesta és bastant fàcil:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{n} & A & \\
\hline
 & \forall x A & \mathrm{I}\forall\ \mathrm{n}
\end{array}
$$

O sigui, que si A es compleix sempre, es compleix per qualsevol valor de x. No ha d'haver cap x *lliure* en cap hipòtesi accesible.

7.2.5 Eliminació de l'universal

Una altra fàcil d'entendre:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{n} & \forall x A & \\
\hline
 & A\{t/x\} & \mathrm{E}\forall\ \mathrm{n,t}
\end{array}
$$

Si sabem que A es compleix per qualsevol element, llavors podem escollir un element qualsevol i sabem que es complirà A en aquell element.

7.2.6 Exemples

A l'última secció hi ha algun exemple amb quantificadors, però sense explicar. Suposo que hauràs de mirar algun llibre de lògica si t'interessa entendre'ls.

7.3 Regles derivades

A molts llibres i tutorials s'accepta tenir altres regles (apart de les 9 bàsiques) que permeten tractar amb les fórmules més fàcilment. Representen una abstracció: deixar de pensar en els detalls per dedicar-se a problemes més complicats (és com allò dels llenguatges de programació d'*alt nivell*).

Si decideixes usar-les, et perdràs moltes coses interessants per fer, però acabaràs abans. El meu consell és que utilitzis una regla només si saps demostrar la seva validesa mitjançant les 9 bàsiques.

Algunes de les que vaig trobar per diversos llocs són:

- *Llei de doble negació*: permet passar de A a $\neg\neg A$ i viceversa.
- *Modus Tollens*: si tens $A \Rightarrow B$ i $\neg B$, llavors $\neg A$.
- *Sil·logisme disjuntiu*: si $A \vee B$ i $\neg A$, llavors B. I si $A \vee B$ i $\neg B$, llavors és que A.
- *Eliminació de* $\neg\Rightarrow$: si tens $\neg(A \Rightarrow B)$, llavors passen tant A com $\neg B$.
- *Eliminació de* $\neg\vee$: si tens $\neg(A \vee B)$, llavors $\neg A$, i també $\neg B$.
- *Eliminació de* $\neg\wedge$: si tens $\neg(A \wedge B)$, llavors $\neg A \vee \neg B$.
- *Teoremes que pots incorporar quan vulguis* : $A \Rightarrow A$, $A \vee \neg A$, $\neg(A \wedge \neg A)$ i més.
- *Canvi de fórmules equivalents*: si $A \iff B$, llavors on vegis A pots posar B i viceversa.

N'hi ha moltes més; però si et demanen fer un exercici ja et diran quines regles estan permeses i quines no (per exemple, a nosaltres només ens deixaven usar les bàsiques).

8 Extra

Si ja sabies tot això que he explicat, o tens dubtes que no tenen a veure amb el com es fa, queda't a aquesta secció.

8.1 Per què es diu deducció natural?

Perquè els procediments que s'han d'usar són els mateixos que els que fa la gent en pensar.

Fixa't en els exercicis resolts. Expressa els seqüents en forma de paraules, digues-els a algú, i acabarà dient-te que "*és clar que és així, perquè ...*". Veuràs que qualsevol és capaç d'explicar-te com s'usen algunes de les 9 regles, encara que no coneguin el nom o ni tals sols la seva existència.

Per aquesta raó, si vols descobrir com fer un cert exercici de deducció natural, oblida't de regles de *introducció* i *eliminació*, i pensa de forma normal, canviant les lletres per accions senzilles si fa falta. Va molt bé pensar en tot això de *plou*, *no plou*, *fa sol*, *no em mullo*, ... perquè són paraules curtes i a més tothom té molt clar què passa quan plou, i relacionen ràpidament el *no mullar-se* amb el *fer sol i no ploure*, i fins i tot fórmules molt més complexes.

8.2 La solució és única?

No. Quant més complicat és l'exercici, més formes correctes hi ha de solucionar-ho. A la secció dels exercicis explicats ja hi ha algun pel qual dono més d'una versió.

Naturalment, pots començar a deduir coses que no serveixin de res, i aconseguiràs una solució diferent a les altres. Però és millor intentar fer cada exercici el més curt possible.

8.3 Altres formes de demostrar validesa

La deducció natural és una forma de demostrar la validesa d'un seqüent, però n'hi ha més. Altres són:

8.3.1 Força bruta

Podem llistar totes les possibles combinacions de valors per cada variable, i comprovar que, per cada una, si la part esquerra del seqüent es compleix llavors la part dreta també.

Si hi ha n variables, farà falta comprovar 2^n casos.

El problema està en si hi ha quantificadors, perquè llavors ja hi intervé un domini. I no podem llistar alguns dels possibles dominis existents, perquè un domini pot contenir infinits elements.

8.3.2 Teorema de refutació

El teorema de refutació diu que $\Gamma \vDash A \Longleftrightarrow \nvDash \Gamma, \neg A$.

En paraules: el conjunt de fórmules Γ (*gamma*) té com conseqüència a A *si i només si* el sistema format per Γ junt amb $\neg A$ és insatisfactible.

El com demostrar la *insatisfactibilitat* és un altre tema, bastant llarg, tal com el seu nom suggereix. Un dels mètodes fàcils d'usar és el de l'arbre de *resolució* clausular.

8.4 Com demostrar la invalidesa

La deducció natural dóna un procediment per demostrar que un raonament és correcte, però com es demostra que un raonament és erroni? No es pot fer amb deducció natural.

Estem en aquest cas: tenim el seqüent $\Gamma \vdash A$, i creiem que hi ha un *model* (conjunt de valors) que fa cert a Γ -*gamma*- però no a A. Doncs tan sols hem de trobar-lo per demostrar que el seqüent és invàlid. A aquest model se l'anomena *contramodel*, i es pot trobar de moltes formes. Crec que la més senzilla és *fer-ho* *a ull*: anar provant diferents valors que creiem que poden ser contramodel, fins trobar-ne un.

Per exemple, $\neg P \Rightarrow \neg Q,\ \neg Q \vdash \neg P \vee Q$ és invàlid ($\not\models$), perquè quan P és cert i Q és fals, tot el de l'esquerra (*antecedent*) és cert però el de la dreta (*conseqüent*) és fals, així que $\neg P \vee Q$ no és conseqüència del de l'esquerra.

8.5 Fes-te els teus exercicis

Si ja has llegit i après tots els exemples d'aquest document, error! Ara t'has quedat sense exercicis per practicar tu sol.

Pots inventar-te seqüents i intentar demostrar que són vàlids; el problema és que si no ho són, et passaràs molta estona intentant demostrar la seva validesa inútilment. Has d'inventar-te seqüents vàlids, i després demostrar-los correctament.

Alguns mètodes que conec per fer això són:

- Si A i B són la mateixa fórmula, però escrita de formes distintes, intenta demostrar $A \models B$ o $B \models A$.
- Agafa una veritat i intenta demostrar-la. Exemple: $\vdash P \wedge P \Rightarrow P \vee P$.
- Agafa una mentida, nega-la, i intenta demostrar aquesta fórmula. Exemple: $\neg(A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$. Aquest mètode et farà practicar la *reducció a l'absurd*.
- Passa una fórmula a la seva *forma normal conjuntiva* (que quedi de la forma *una* $\wedge$ *altra* $\wedge$ ... $\wedge$ *altra*). Llavors ja tens moltes fórmules que són certes alhora: cadascun dels conjuntands. Pots escollir un d'ells i afirmar que quan la fórmula original és certa, aquell conjuntand també ho és.
- Escull algunes fórmules a l'atzar, i suposa que totes es compleixen simultàniament. Per fer això, fes la seva conjunció (*una* $\wedge$ *altra* $\wedge$ *altra* $\wedge$ ...). Aquesta fórmula grossa la pots modificar amb els mètodes anteriors per buscar conseqüències. Tot això et servirà per practicar la deducció natural amb *vàries* fórmules certes a l'esquerra del seqüent.

8.6 Programes que facin deducció natural

Hi ha algun programa d'ordinador que faci tot això que explico, però sense que hagis de pensar o treballar per res? Bé, la veritat és que no ho sé; jo no en conec cap. Tots els exemples que hi ha aquí els he fet a mà.

Pots provar a fer funcionar coses com seqprover[7] o pandora[8]. Jo no ho he aconseguit, i el poc que he trobat està a mitges o són només projectes. Suposo que aquest tipus de programa deu costar molt de fer, per això de que la deducció és *natural* (és més apropiada per a cervells humans). Encara que els ordinadors poden aplicar força bruta...

[7] http://bach.istc.kobe-u.ac.jp/seqprover/
[8] http://www.doc.ic.ac.uk/ yg/projects/AI/prover.html

El que sí que pots provar i va bé és un joc[9] semblant al dòmino que serveix per demostrar seqüents mitjançant peces de colors. Requereix una mica d'aprenentatge.

9 Exemples, molts exemples

Per acabar, aquí poso una col·lecció de bastants exemples (sense comentar). Els he fet jo, així que si trobes errades avisa'm.

Els 14 primers sí que estan explicats amb paraules a la secció 5.

9.1 $P,\ P \Rightarrow Q \vdash P \wedge Q$

1	P	
2	$P \Rightarrow Q$	
3	Q	E$\Rightarrow$ 2,1
4	$P \wedge Q$	I$\wedge$ 1,3

9.2 $P \wedge Q \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow P,\ Q \vdash R$

1	$P \wedge Q \Rightarrow R$	
2	$Q \Rightarrow P$	
3	Q	
4	P	E$\Rightarrow$ 2,3
5	$P \wedge Q$	I$\wedge$ 4,3
6	R	E$\Rightarrow$ 1,5

9.3 $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$Q \Rightarrow R$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad R$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\quad Q \wedge R$	I$\wedge$ 4,5
7	$P \Rightarrow Q \wedge R$	I$\Rightarrow$ 3,6

[9] http://www.winterdrache.de/freeware/domino/

9.4 $P \vdash Q \Rightarrow P$

1	P	
2	$\quad Q$	H
3	$\quad P$	IT 1
4	$Q \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 2,3

9.5 $P \Rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$\neg Q$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad \neg Q$	IT 2
6	$\neg P$	I$\neg$ 3,4,5

9.6 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

1	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	
2	$\quad Q$	H
3	$\quad\quad P$	H
4	$\quad\quad Q \Rightarrow R$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad\quad R$	E$\Rightarrow$ 4,2
6	$\quad P \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,5
7	$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	I$\Rightarrow$ 2,6

9.7 $P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$

1	$P \vee (Q \wedge R)$	
2	$\quad P$	H
3	$\quad P \vee Q$	I$\vee$ 2
4	$\quad Q \wedge R$	H
5	$\quad Q$	E$\wedge$ 4
6	$\quad P \vee Q$	I$\vee$ 5
7	$P \vee Q$	E$\vee$ 1,3,6

9.8 $L \wedge M \Rightarrow \neg P,\ I \Rightarrow P,\ M,\ I \vdash \neg L$

1	$L \wedge M \Rightarrow \neg P$	
2	$I \Rightarrow P$	
3	M	
4	I	
5	$\quad L$	H
6	$\quad L \wedge M$	I$\wedge$ 5,3
7	$\quad \neg P$	E$\Rightarrow$ 1,6
8	$\quad P$	E$\Rightarrow$ 2,4
9	$\neg L$	I$\neg$ 5,7,8

9.9 $\vdash P \Rightarrow P$

1	$\quad P$	H
2	$\quad P$	IT 1
3	$P \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 1,2

9.10 $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$

1	$\quad P \wedge \neg P$	H
2	$\quad P$	E$\wedge$ 1
3	$\quad \neg P$	E$\wedge$ 1
4	$\neg(P \wedge \neg P)$	I$\neg$ 1,2

9.11 $\vdash P \vee \neg P$

1	$\mid\ \neg(P \vee \neg P)$	H
2	$\mid\ \mid\ P$	H
3	$\mid\ \mid\ P \vee \neg P$	I$\vee$ 2
4	$\mid\ \mid\ \neg(P \vee \neg P)$	IT 1
5	$\mid\ \neg P$	I$\neg$ 2,3,4
6	$\mid\ P \vee \neg P$	I$\vee$ 5
7	$\mid\ \neg(P \vee \neg P)$	IT 1
8	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	I$\neg$ 1,6,7
9	$P \vee \neg P$	E$\neg$ 8

9.12 $P \vee Q,\ \neg P \vdash Q$

1	$P \vee Q$	
2	$\neg P$	
3	$\mid\ P$	H
4	$\mid\ \mid\ \neg Q$	H
5	$\mid\ \mid\ \neg P$	IT 2
6	$\mid\ \mid\ P$	IT 3
7	$\mid\ \neg\neg Q$	I$\neg$ 4,5,6
8	$\mid\ Q$	E$\neg$ 7
9	$\mid\ Q$	H
10	$\mid\ Q$	IT 9
11	Q	E$\vee$ 1,8,10

9.13 $A \vee B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \vee D$

1	$A \vee B$	
2	$A \Rightarrow C$	
3	$\neg D \Rightarrow \neg B$	
4	$\mid\ A$	H
5	$\mid\ C$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\mid\ C \vee D$	I$\vee$ 5
7	$\mid\ B$	H
8	$\mid\ \mid\ \neg D$	H
9	$\mid\ \mid\ \neg B$	E$\Rightarrow$ 3,8
10	$\mid\ \mid\ B$	IT 7
11	$\mid\ \neg\neg D$	I$\neg$ 8,9,10
12	$\mid\ D$	E$\neg$ 11
13	$\mid\ C \vee D$	I$\vee$ 12
14	$C \vee D$	E$\vee$ 1,6,13

9.14 $A \Longleftrightarrow B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

1	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	
2	$\quad \neg(A \vee \neg A)$	H
3	$\quad\quad A$	H
4	$\quad\quad A \vee \neg A$	I$\vee$ 3
5	$\quad\quad \neg(A \vee \neg A)$	IT 2
6	$\quad \neg A$	I$\neg$ 3,4,5
7	$\quad A \vee \neg A$	I$\vee$ 6
8	$\quad \neg(A \vee \neg A)$	IT 2
9	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	I$\neg$ 2,7,8
10	$A \vee \neg A$	E$\neg$ 9
11	$\quad A$	H
12	$\quad A \Rightarrow B$	E$\wedge$ 1
13	$\quad B$	E$\Rightarrow$ 12,11
14	$\quad A \wedge B$	I$\wedge$ 11,13
15	$\quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	I$\vee$ 14
16	$\quad \neg A$	H
17	$\quad\quad B$	H
18	$\quad\quad B \Rightarrow A$	E$\wedge$ 1
19	$\quad\quad A$	E$\Rightarrow$ 18,17
20	$\quad\quad \neg A$	IT 16
21	$\quad \neg B$	I$\neg$ 17,19,20
22	$\quad \neg A \wedge \neg B$	I$\wedge$ 16,21
23	$\quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	I$\vee$ 22
24	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	E$\vee$ 10,15,23

9.15 $P \vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$

1	P	
2	$\vert\ P \Rightarrow Q$	H
3	$\vert\ Q$	E$\Rightarrow$ 2,1
4	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$	I$\Rightarrow$ 2,3

9.16 $P \Rightarrow Q \vdash (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$\vert\ Q \Rightarrow R$	H
3	$\vert\ \vert\ P$	H
4	$\vert\ \vert\ Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\vert\ \vert\ R$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\vert\ P \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,5
7	$(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	I$\Rightarrow$ 2,6

9.17 $P \Rightarrow Q,\ P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow R$

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	
3	$\vert\ P$	H
4	$\vert\ Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\vert\ Q \Rightarrow R$	E$\Rightarrow$ 2,3
6	$\vert\ R$	E$\Rightarrow$ 5,4
7	$P \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,6

9.18 $P \wedge Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

1	$P \wedge Q \Rightarrow R$	
2	$\vert\ P$	H
3	$\vert\ \vert\ Q$	H
4	$\vert\ \vert\ P \wedge Q$	I$\wedge$ 2,3
5	$\vert\ \vert\ R$	E$\Rightarrow$ 1,4
6	$\vert\ Q \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,5
7	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	I$\Rightarrow$ 2,6

9.19 $\neg P \vdash P \Rightarrow Q$

1	$\neg P$	
2	$\vert\ P$	H
3	$\vert\ \vert\ \neg Q$	H
4	$\vert\ \vert\ \neg P$	IT 1
5	$\vert\ \vert\ P$	IT 2
6	$\vert\ \neg\neg Q$	I$\neg$ 3,4,5
7	$\vert\ Q$	E$\neg$ 6
8	$P \Rightarrow Q$	I$\Rightarrow$ 2,7

9.20 $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	E$\wedge$ 1
3	$B \vee C$	E$\wedge$ 1
4	$\vert\ B$	H
5	$\vert\ A \wedge B$	I$\wedge$ 2,4
6	$\vert\ (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	I$\vee$ 5
7	$\vert\ C$	H
8	$\vert\ A \wedge C$	I$\wedge$ 2,7
9	$\vert\ (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	I$\vee$ 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	E$\vee$ 3,6,9

9.21 $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$

1	$\neg A \vee B$	
2	$\mid\ A$	H
3	$\mid\ \mid\ \neg A$	H
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg B$	H
5	$\mid\ \mid\ \mid\ A$	IT 2
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg A$	IT 3
7	$\mid\ \mid\ \neg\neg B$	I$\neg$ 4,5,6
8	$\mid\ \mid\ B$	E$\neg$ 7
9	$\mid\ \mid\ B$	H
10	$\mid\ \mid\ B$	IT 9
11	$\mid\ B$	E$\vee$ 1,8,10
12	$A \Rightarrow B$	I$\Rightarrow$ 2,11

9.22 $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

1	$\mid\ (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	H
2	$\mid\ \mid\ \neg P$	H
3	$\mid\ \mid\ \mid\ P$	H
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg Q$	H
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ P$	IT 3
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg P$	IT 2
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\neg Q$	I$\neg$ 4,5,6
8	$\mid\ \mid\ \mid\ Q$	E$\neg$ 7
9	$\mid\ \mid\ P \Rightarrow Q$	I$\Rightarrow$ 3,8
10	$\mid\ \mid\ P$	E$\Rightarrow$ 1,9
11	$\mid\ \mid\ \neg P$	IT 2
12	$\mid\ \neg\neg P$	I$\neg$ 2,10,11
13	$\mid\ P$	E$\neg$ 12
14	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 1,13

9.23 $Pa,\ Qa \vdash \exists x(Px \wedge Qx)$

1	Pa	
2	Qa	
3	$Pa \wedge Qa$	I$\wedge$ 1,2
4	$\exists x(Px \wedge Qx)$	I$\exists$ 3,a

9.24 $\forall x(Px \Rightarrow Qx),\ Pa \vdash Qa$

1	$\forall x(Px \Rightarrow Qx)$	
2	Pa	
3	$Pa \Rightarrow Qa$	E$\forall$ 1,a
4	Qa	E$\Rightarrow$ 3,2

9.25 $\forall x(Px \Rightarrow Qx),\ \forall x(Qx \Rightarrow Rx) \vdash \forall x(Px \Rightarrow Rx),$

1	$\forall x(Px \Rightarrow Qx)$	
2	$\forall x(Qx \Rightarrow Rx)$	
3	│ Px	H
4	│ $Px \Rightarrow Qx$	E$\forall$ 1,x
5	│ $Qx \Rightarrow Rx$	E$\forall$ 2,x
6	│ Qx	E$\Rightarrow$ 4,3
7	│ Rx	E$\Rightarrow$ 5,6
8	$Px \Rightarrow Rx$	I$\Rightarrow$ 3,7
9	$\forall x(Px \Rightarrow Rx)$	I$\forall$ 8

9.26 $\exists x \forall y Pxy \vdash \forall y \exists x Pxy$

1	$\exists x \forall y Pxy$	
2	│ $\forall y Pay$	H
3	│ Pay	E$\forall$ 2,y
4	│ $\exists x Pxy$	I$\exists$ 3,a
5	$\exists x Pxy$	E$\exists$ 1,2,4,a
6	$\forall y \exists x Pxy$	I$\forall$ 5